Correction Devoir maison n°13

Exercice 1

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie pour tout entier n strictement positif par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}dx$$

1. On a
$$u_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2)$$
$$\boxed{\text{Donc } u_1 = \ln(2).}$$

2. On a pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\begin{aligned} x^{n-1} > 0 &\Longrightarrow \frac{x^{n-1}}{1+x} > 0 \\ &\Longrightarrow \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}dx > 0 \end{aligned}$$
$$\boxed{\text{Donc pour } n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \text{ est positive.}}$$

3. On calcule
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx - \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^n - x^{n-1}}{1+x}dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^{n-1}(x-1)}{1+x}dx \end{aligned}$$
Pour $x \in [0,1]$, on a $x^{n-1} > 0$, $1+x > 0$ et $x - 1 < 0$. Ainsi,
$$u_{n+1} - u_n < 0$$
$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est décroissante.}}$$

4. Pour tout entier n strictement positif,
$$\begin{aligned} u_{n+1} + u_n &= \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx - \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^n + x^{n-1}}{1+x}dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^{n-1}(1+x)}{1+x}dx \\ &= \int_0^1 x^{n-1}dx \\ &= \left[\frac{x^n}{n}\right]_0^1 = \frac{1}{n} - 0. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{D'où la relation } u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n}.}$$

5. On a donc la relation suivante $u_{n+1} = \dfrac{1}{n} - u_n$

```
n = input("Donnez un entier n")
u = log(2)
for k = 1:n-1
    u = 1/k - u
end
dips(u)
```

6. La suite (u_n) est décroissante donc

$$\begin{aligned} u_{n+1} \leq u_n &\iff u_{n+1} + u_n \leq u_n + u_n \\ &\iff \frac{1}{n} \leq 2u_n \end{aligned}$$

De même, en écrivant l'égalité de la question 4 pour $n-1$ on a $u_n + u_{n-1} = \dfrac{1}{n-1}$ et

$$\begin{aligned} u_n \leq u_{n-1} &\iff u_n + u_n \leq u_{n-1} + u_n \\ &\iff 2u_n \leq \frac{1}{n-1} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout entier } n \text{ supérieur ou égal à } 2,\ \frac{1}{n} \leq 2u_n \leq \frac{1}{n-1}}$$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n-1} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est convergente et } \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$$

7. En utilisant l'inégalité précédente,

$$\frac{1}{n} \leq 2u_n \leq \frac{1}{n-1} \iff \frac{1}{2} \leq nu_n \leq \frac{n}{2(n-1)}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{2(n-1)} = \dfrac{1}{2}$. En utilisant encore une fois le théorème des gendarmes, on a

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} nu_n = \frac{1}{2}.}$$

Exercice 2

A venir

Exercice 3

Cet exercice étudie deux jeux de un dés avec des dés équilibrés à six faces.

I. Étude du premier jeu.

Dans ce jeu on lance simultanément deux dés équilibrés, si les deux donnent le même résultat alors le joueur marque 1 point, sinon il ne marque pas de point.

1. On peut procéder de plusieurs façon :

   Par dénombrement : On a $\Omega = [\![1,6]\!]^2$, $\text{card}(\Omega) = 36$. Il y a 6 façons d'obtenir un double, la probabilité est donc

$$\boxed{p = \frac{1}{6}.}$$

   En utilisant des évènements : On note A_i "obtenir le nombre i avec le premier dé" et B_i " obtenir le nombre i avec le deuxième dé". Dans ce cas, comme les évènements A_i et B_j ($i, j \in [\![1,6]\!]$) sont indépendants,

$$\begin{aligned} p &= \sum_{i=1}^{6} P(A_i \cap B_i) \\ &= \sum_{i=1}^{6} P(A_i) \times P(B_i) \\ &= \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

   En utilisant des VA : On appelle X la VA égale au résultat du premier dé et Y la VA égale au résultat du second dé. X et Y sont indépendants et

$$\begin{aligned} p = P(X = Y) &= \sum_{i=1}^{6} P(X = i \cap Y = i) \\ &= \sum_{i=1}^{6} P(X = i)P(Y = i) \\ &= \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

2. Le joueur répète n fois le même jeu et on note alors Y_n le nombre de points obtenus par le joueur après ces n parties.

   (a) On répète n fois une épreuve de Bernoulli de probabilité de succès $p = \frac{1}{6}$. Les répétitions sont indépendantes. Donc Y_n suit une loi binomiale de paramètre n et $\frac{1}{6}$.

$$\boxed{Y_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n, 1/6).}$$

   On a alors

$$\boxed{\forall k \in [\![0,n]\!], \quad P(Y_n = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}.}$$

   (b) D'après le cours,

$$\boxed{E(Y_n) = \frac{n}{6} \text{ et } V(Y_n) = \frac{5n}{36}.}$$

3. Le joueur joue maintenant jusqu'à ce qu'il marque un point pour la première fois.
   On note alors Z la variable aléatoire représentant le nombre de parties effectuées par le joueur.

   (a) Trouver le nombre de parties effectuées par le joueur revient à trouver l'apparition du premier succès dans la répétition d'une épreuve de Bernoulli de probabilité $p = \frac{1}{6}$. Z suit donc une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{6}$.

   $$\boxed{Z =\hookrightarrow \mathscr{G}\left(\frac{1}{6}\right).}$$

   On a alors

   $$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(Z = k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{6}\right).}$$

   (b) D'après le cours,

   $$\boxed{E(Z) = 6 \text{ et } V(Z) = \frac{\frac{5}{6}}{\left(\frac{1}{6}\right)^2} = 30.}$$

II. Étude d'un deuxième jeu.

Pour ce jeu, effectuer une partie consiste à lancer successivement deux dés équilibrés.

On note :

— D_1 le résultat du premier dé et D_2 le résultat du deuxième dé

— E_1 l'événement : $(D_1 < D_2)$, E_2 l'événement : $(D_1 = D_2)$ et E_3 l'événement : $(D_1 > D_2)$

Lors d'une partie,

— si l'événement E_1 se produit alors le joueur ne marque pas de point,

— si l'événement E_2 se produit alors le joueur marque 2 points,

— si l'événement E_3 se produit alors le joueur marque 1 point.

Le joueur répète n fois ce jeu. Pour tout entier naturel $i \geq 1$, on note :

— X_i la variable aléatoire représentant le nombre de points marqués lors de la $i^{ème}$ partie ;

— S_i le nombre de points marqués après i parties.

1. On a montré dans la partie 1 que

   $$\boxed{p(E_2) = p = \frac{1}{6}.}$$

   On pourrait calculer $p(E_1)$ et $p(E_3)$ par dénombrement mais il est plus simple de remarquer que par symétrie, $p(E_1) = p(E_3) = x$ et comme

   $$\begin{aligned} p(E_1) + p(E_2) + p(E_3) = 1 &\iff 2x = 1 - p(E_2) \\ &\iff 2x = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

   Finalement

$$\boxed{p(E_1) = p(E_3) = \frac{5}{12}.}$$

2. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. $X_i(\Omega) = [\![0, 2]\!]$. D'après la question précédente,

$$\boxed{P(X_i = 0) = P(E_1) = \frac{5}{12},\ P(X_i = 1) = P(E_3) = \frac{5}{12} \quad \text{et} \quad P(X_i = 2) = P(E_2) = \frac{1}{6}}$$

On peut alors calculer

$$\boxed{E(X_i) = 0 \times \frac{5}{12} + 1 \times \frac{5}{12} + 2 \times \frac{1}{6} = \frac{9}{12}.}$$

On calcule également

$$E(X_i^2) = 0^2 \times \frac{5}{12} + 1^2 \times \frac{5}{12} + 2^2 \times \frac{1}{6} = \frac{13}{12}$$

Ainsi, d'après la formule de Köenig-Huygens

$$\boxed{V(X_i) = E(X_i^2) - E(X_i)^2 = \frac{13}{12} - \frac{81}{144} = \frac{156}{144} - \frac{81}{144} = \frac{75}{144}.}$$

3. S_1 a la même loi que X_1.
4. Le support de S_2 est $S_2(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. On a alors Pour faire 0 points, il faut faire 0 points au premier lancer et 0 points au deuxième lancer.

$$P(S_2 = 0) = P(X_1 = 0 \cap X_2 = 0) = \frac{5}{12} \times \frac{5}{12} = \frac{25}{144}$$

Pour faire 1 points, il faut faire 1 points au premier, 0 points au deuxième ou 0 points au premier, 1 point au deuxième.

$$\begin{aligned}
P(S_2 = 1) &= P((X_1 = 0 \cap X_2 = 1) \cup (X_1 = 1 \cap X_2 = 0)) \\
&= P(X_1 = 0)P(X_2 = 1) + P(X_1 = 1)P(X_2 = 0) \\
&= \frac{5}{12} \times \frac{5}{12} + \frac{5}{12} \times \frac{5}{12} \\
&= \frac{50}{144}
\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
P(S_2 = 2) &= P((X_1 = 0 \cap X_2 = 2) \cup P((X_1 = 1 \cap X_2 = 1) \cup (X_1 = 2 \cap X_2 = 0)) \\
&= P(X_1 = 0)P(X_2 = 2) + P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) + P(X_1 = 2)P(X_2 = 0) \\
&= \frac{5}{12} \times \frac{1}{6} + \frac{5}{12} \times \frac{5}{12} + \frac{1}{6} \times \frac{5}{12} \\
&= \frac{10}{144} + \frac{25}{144} + \frac{10}{144} \\
&= \frac{45}{144}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(S_2 = 3) &= P((X_1 = 1 \cap X_2 = 2) \cup (X_1 = 2 \cap X_2 = 1)) \\
&= P(X_1 = 1)P(X_2 = 2) + P(X_1 = 2)P(X_2 = 1) \\
&= \frac{5}{12} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{5}{12} \\
&= \frac{5}{36}
\end{aligned}$$

et enfin

$$P(S_2 = 4) = P(X_1 = 2 \cap X_2 = 2) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

5. (a) Le support de S_3 est

$$\boxed{S_3(\Omega) = [\![0, 6]\!].}$$

(b) En utilisant le système complet d'évènement associé à S_2

$$\begin{aligned}
P(S_3 = 2) &= \sum_{k=0}^{4} P(S_2 = k) P_{S_2=k}(S_3 = 2) \\
&= P(S_2 = 0)P(X_3 = 2) + P(S_2 = 1)P(X_3 = 1) + P(S_2 = 2)P(X_3 = 0) + 0 + 0 \\
&= \frac{25}{144} \times \frac{1}{6} + \frac{50}{144} \times \frac{5}{12} + \frac{45}{144} \times \frac{5}{12} \\
&= \frac{50}{1728} + \frac{250}{1728} + \frac{225}{1728}
\end{aligned}$$

On a alors

$$\boxed{P(S_3 = 2) = \frac{525}{1728}.}$$

6. (a) On a

$$\boxed{S_n = X_1 + \ldots + X_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.}$$

Par linéarité de l'espérance

$$\begin{aligned}
E(S_n) &= E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} E(X_k)
\end{aligned}$$

Et comme pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $E(X_k) = \dfrac{9}{12}$, on a

$$\boxed{E(S_n) = \frac{9n}{12}.}$$

(b) On résout $\dfrac{9n}{12} = 10 \iff n = \dfrac{120}{9} \approx 13,3$ En moyenne, il faudra au minimum <u>14 parties</u> pour que le joueur obtienne plus de 10 points

Exercice 4

1. Au mieux $X = 1$, au pire $X = n$ et toutes les valeurs intermédiaires sont possibles, donc

$$\boxed{X(\Omega) = [\![1, n]\!]}$$

2. (a) Si on sait $B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_{i-1}$, pour le i-eme tirage, il reste $n - (i - 1)$ boules dans l'urne, dont une boule noire.
Donc

$$\boxed{P_{B_1\cap\ldots\cap B_{i-1}}(B_i) = \frac{n-(i-1)-1}{n-(i-1)} = \frac{n-i}{n-i+1}}$$

(b) $(X = k)$ est l'événement $B_1 \cap \ldots B_{k-1} \cap N_k$.
En utilisant la formule des probabilités composées :
$P(X = k) = \dfrac{n-1}{n} \times \dfrac{n-2}{n-1} \times \ldots \times \dfrac{n-(k-1)}{n-k+2} \times \dfrac{1}{n-k+1} = \dfrac{1}{n}$ (par télescopage multiplicatif).

$$\boxed{\forall n \in [\![1, n]\!] \quad P(X = k) = \frac{1}{n}}$$

(c) Il en résulte que : $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[\![1,n]\!]} \quad E(X) = \dfrac{n+1}{2} \quad V(X) = \dfrac{n^2-1}{12}}$

3. (a) Notons B'_i l'événement « le i-eme tirage donne une boule blanche numérotée 0 ».

$$(X = k) \cap (Y = 0) = B'_1 \cap B'_2 \cap \ldots \cap B'_{k-1} \cap N_k.$$

Par le même principe :

$$\begin{aligned} P\left[(X = k) \cap (Y = 0)\right] &= \frac{n-2}{n} \times \frac{n-3}{n-1} \times \frac{n-4}{n-2} \times \ldots \times \frac{n-k}{n-k+2} \times \frac{1}{n-k+1} = \frac{(n-k)\times 1}{n(n-1)} \\ &= \frac{n-k}{n(n-1)} \quad \text{(par télescopage multiplicatif)} \end{aligned}$$

(b) On utilise le système complet d'événements $(X = k)_{k\in[\![1,n]\!]}$. La formule des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned} P(Y = 0) &= \sum_{k=1}^{n} P(X = k \cap Y = 0) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k}{n(n-1)} \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n} (n-k) \end{aligned}$$

On pose $i = n - k$ dans cette dernière somme :

$$\begin{aligned} P(Y = 0) &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=n-1}^{0} i \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=0}^{n-1} i \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \times \frac{(n-1)n}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{P(Y = 0) = \frac{1}{2}}$$

(c) $P(Y = 1) = 1 - P(Y = 0) = \dfrac{1}{2}$. Donc

$$\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right) \quad E(Y) = \frac{1}{2} \quad V(Y) = \frac{1}{4}}$$

4. (a) En ligne 6 : `Nb=Nb-1` (une boule blanche a été tirée)
En ligne 7 : `u=grand(1,1,'uin',1,Nb+1)` (il reste $Nb+1$ boule dans l'urne)
En ligne 8 : `X=X+1` (un tirage de plus)

(b) En ligne 4 : `Y=0`
En ligne 8 : `Y=1`
On peut répondre aux deux question a : et b : avec le script complet suivant :

```
1.  n=input('entrez une valeur pour n : ')
2.  nB=n-1
3.  X=1
4.  Y=--0--
5.  u=grand(1,1,'uin',1,nB+1)
6.  while u<nB+1
7.      nB=-- nB-1 --
8.      if u==1 then
9.          Y=--1--
10.     end
11.     u=grand(1,1,'uin',1,--nB+1--)
12.     X=--X+1--
13. end
14. disp(X,'la boule noire est apparue au tirage numéro')
15. disp(Y,'la valeur de Y est')
```